MINISTERE DE L'EQUIPEMENT

E.I. T.P.E. 1976

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(temps accordé : 3 heures)

Nota : Les deux parties du problème sont indépendantes et peuvent être traitées dans un ordre quelconque.

I - 1°) Soit λ un paramètre réel. On considère sur l'intervalle $[0, 1]$ la fonction $f_\lambda(x) = x^\lambda \sin \pi x$.

Discuter, selon les valeurs de λ dans $\mathbb{R}$

a) le domaine de définition de f_λ ,

b) les valeurs aux bornes $x = 0$ et $x = 1$ de f_λ ,

c) le sens de variation de f_λ ,

d) les pentes des demi-tangentes aux points $x = 0$ et $x = 1$ (quand elles existent) de la courbe représentative de f_λ .

Tracer l'allure des différentes courbes représentatives de ces fonctions pour les divers cas envisagés.

2°) On a pu constater au I-1°) la présence éventuelle d'un extremum. Quelle est l'équation du lieu de cet extremum, quand λ varie ?

Cette équation s'écrit $y = \psi(x)$, ce qui définit une fonction $\psi : [0, 1] \to \mathbb{R}$.

Calculer les valeurs aux bornes $x = 0$ et $x = 1$ de cette fonction ψ et les pentes des demi-tangentes aux points $x = 0$ et $x = 1$ de la courbe représentative du lieu.

II - On pose maintenant $u_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$ soit $u_n = \int_0^1 x^n \sin \pi x\,dx$

n étant un entier naturel quelconque.

1°) Montrer que u_n tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

2°) Etablir une relation de récurrence entre u_n et u_{n-2} .

3°) Quelle est la partie principale de l'infiniment petit u_n quand n croît indéfiniment ?

4°) En déduire la nature de la série de terme général u_n .

.../...

5°) On pose $S_n = \sum_{p=o}^{n} u_p$. Exprimer S_n sous forme d'une intégrale et montrer que la limite, n tendant vers l'infini, de S_n peut s'exprimer sous la forme de l'intégrale sur l'intervalle $[0, \pi]$ d'une fonction très simple. On ne cherchera pas à calculer cette dernière intégrale.

6°) Plus généralement, φ étant une fonction de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, continue, à valeurs positives et telle que $\varphi(1) = 0$, on considère la série de terme général

$$v_n = \int_o^\alpha x^n \varphi(x)\, dx \qquad \text{où} \qquad 0 < \alpha < 1$$

Exprimer $\sigma_n = \sum_{p=o}^{n} v_p$ sous forme d'une intégrale et établir la convergence de la série de terme général v_n .

7°) On note $F(\alpha)$ la somme de la série de terme général v_n dont on vient de montrer la convergence.

On suppose en outre ici que la fonction φ est dérivable et que sa dérivée (à gauche) au point $x = 1$ est continue.

Montrer que sous ces hypothèses $F(\alpha)$ a une limite quand α tend vers 1.

Que peut-on en déduire sur la série de terme général $w_n = \int_o^1 x^n \varphi(x)\, dx$?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail